Wir folgern also hieraus, dafs alle geocentrischen Orte des Planeten sich auf irgend einer **krummen Oberfläche** befinden. Wollte man also, als Hypothese, blofs die Gleichungen (I) aus 4, statt jener (II) zur Bestimmung der geocentrischen Orte der Planeten gebrauchen, d. h., wollte man eine epicyklische Bewegung der wirklich Statt findenden, von der Erde aus gesehenen Bewegung des Planeten substituiren, so zeigen die vorhergehenden Betrachtungen, dafs eine solche Annahme **unmöglich** bestehen könnte.

Die scheinbare Bewegung der Sonne aber liefse sich allenfalls durch eine epicyklische Bewegung ersetzen, denn geocentrisch bewegt sich die Sonne in einer Ellipse, und die Gleichung (α) aus 5 zeigt, dafs, unter der dort angeführten Bedingung, eine epicyklische Bewegung eine Ellipse hervorbringen kann.

Diese Gleichung (α) aus 5 ist aber unter der Bedingnifs gefunden worden, wenn die Epicykeln in verschiedenen Ebenen liegen. Die Annahme der Alten aber, wie bereits erwähnt wurde, war, dafs alle Epicykel sich in einer und derselben Ebene befinden, und diese Annahme giebt, wie es aus Gleichung (β) in 5 erhellt, einen Kreis; es konnte mithin die Hypothese der Alten nicht einmal dazu gebraucht werden, um sich die scheinbare Bewegung der Sonne zu erklären.

27.

Ueber Gaufs neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden.

(Von Herrn Prof. Dr. *C. G. J. Jacobi.*)

1.

In den *Principiis* von **Newton** liest man eine Methode, wie man durch eine Anzahl gegebener Puncte eine parabolische Curve legen könne. Diese Aufgabe erscheint analytisch als Interpolationsproblem, aus mehreren Gliedern einer Reihe das allgemeine zu finden. Es ist der bekanntere Fall, wenn die Intervallen der Ordinaten der gegebenen Puncte gleich grofs sind, oder analytisch ausgedrückt, wenn die Werthe des reihenden Elements, für welche auch die Werthe der entsprechenden Glieder der Reihe gegeben sind, eine arithmetische Progression bilden. Aber der elegante, mit Unrecht weniger gekannte, Algorithmus, den

Newton giebt, erstreckt sich schon auf den allgemeineren Fall, wenn jene Intervallen der Ordinaten der gegebenen Puncte, oder jene Werthe des reihenden Elements irgend beliebige sind. Newton hat hiervon eine Anwendung auf die Quadraturen gemacht. Durch mehrere Puncte der zu quadrirenden Curve, für welche die Ordinaten berechnet worden sind, legt er die parabolische Curve, und deren Quadratur zwischen denselben Grenzen, zwischen denen die gegebene Curve quadrirt werden sollte, giebt einen Näherungswerth.

Newton hat von jenem Interpolationsproblem und seiner Anwendung auf die Quadraturen ferner in einem Tractätchen gehandelt, welches *Methodus Differentialis* betitelt ist, und zuerst der Amsterdamer *) Ausgabe seiner *Principia*, v. J. 1723, nebst anderen Abhandlungen angehängt gefunden wird. Hier rathet er unter andern, zum Behuf der leichteren Berechnung der Integrale, für jede Zahl der berechneten Ordinaten, deren Intervalle er gleich grofs annimmt, Tafeln anzufertigen, von denen er auch selbst einen Anfang giebt, welchen hernach *Roger Cotes* in seiner *harmonia mensurarum* fortgesetzt hat.

Aber Gaufs hat in den Göttinger Commentarien gezeigt, dafs man durch schickliche Wahl der Abscissen, für welche die Ordinaten berechnet werden, den Grad der Näherung auf das Doppelte treiben kann; und da solche Bestimmung unabhängig von der Natur der zu quadrirenden Curve geschieht, so ist es möglich, auch nach der so vervollkommneten Methode Tafeln zu verfertigen, von denen auch Gaufs eine Probe gegeben hat. Gaufs gelangt zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induction, die durch die sogenannte Kästnersche Methode, wenn etwas für die Zahl n gilt, es auch für die Zahl $n+1$ zu erweisen, zur Allgemeinheit erhoben werden kann. Es ist also noch ein directer Beweis zu wünschen. Die grofse Einfachheit und Eleganz der Gaufsischen Resultate, läfst einen einfachen Weg vermuthen. Auf einem solchen einfachen und directen Wege zu jenen Resultaten zu gelangen, mit denen Gaufs die Wissenschaft bereichert hat, ist der Zweck dieser Abhandlung.

2.

Es sey das Integral $\int y\,dx$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ zu nehmen. Andere Grenzen werden leicht auf diese zurückgeführt. Es seyen

---

*) Von dieser Ausgabe ist die Curiosität zu erzählen, dafs sie auf Kosten des berühmten Philologen *Richard Bentley* veranstaltet worden ist, der in seinen englischen und lateinischen Predigten oft die Principia seines genauen Freundes Newton anpries, als ein Bollwerk gegen die Irreligiosität, und eine Offenbarung der Gröfse Gottes.

ferner die Werthe von x, für welche y bekannt ist, a', a'', a''', ..., $a^{(n)}$, so daſs, wenn man $y = f(x)$ setzt, die entsprechenden Werthe von y werden: $f(a')$, $f(a'')$, $f(a''')$, ..., $f(a^{(n)})$. Man bilde das Product $(x-a')(x-a'')(x-a''')\ldots\ldots(x-a^{(n)})$, und nenne es $\varphi(x)$, so hat man, wenn $y = f(x)$ eine ganze rationale Function vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, durch Zerfällung in Partialbrüche:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a')}{\varphi'(a')(x-a')} + \frac{f(a'')}{\varphi'(a'')(x-a'')} + \frac{f(a''')}{\varphi'(a''')(x-a''')} + \ldots + \frac{f(a^{(n)})}{\varphi'(a^{(n)})(x-a^{(n)})},$$

wo wir mit $\varphi'(a^{(m)})$ den Werth von $\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, für $x = a^{(m)}$, bezeichnen. Vermittelst dieser Formel findet man, durch Multiplication mit φx, sogleich y aus den speciellen Werthen für $x = a'$, $x = a''$, $x = a'''$, ... $x = a^{(n)}$. Uebersteigt aber y den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, so giebt der Ausdruck zur rechten Seite des Gleichheitszeichens, welchen wir G nennen wollen, nur den ächten Bruch, der in dem unächten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ steckt; so daſs, wenn $f(x)$ z. B. vom $(n+p)^{\text{ten}}$ Grade ist, und man $f(x) = U + V.\varphi(x)$ hat, wo U höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$, V vom p^{ten} Grade ist, $G = \frac{U}{\varphi(x)}$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{U}{\varphi(x)} + V = G + V$. Entwickelt man G und den Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nach den absteigenden Potenzen von x, so enthält $G = \frac{U}{\varphi(x)}$ die negativen, V die positiven Potenzen von x, die sich in der Entwickelung von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ befinden. Setzt man daher $f(x) =$

$$a + a'x + a''x^2 + \ldots + a^{(n)}x^n + a^{(n+1)}x^{(n+1)} + \ldots + a^{(2n)}x^{2n} + \text{u. s. w.},$$

$$\text{und } \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{A'}{x^n} + \frac{A''}{x^{n+1}} + \frac{A'''}{x^{n+2}} + \ldots\ldots + \frac{A^{(n+1)}}{x^{2n}} + \text{u. s. w.},$$

so findet man $V =$

$$a^{(n)}A' + a^{(n+1)}(A'x + A'') + a^{(n+2)}(A'x^2 + A''x + A''') + \ldots\ldots$$
$$+ a^{(2n-1)}(A'x^{n-1} + A''x^{n-2} + \ldots + A^{(n)}) + \text{u. s. w.}$$

3.

Newton's Näherungsmethode besteht darin: statt $y = f(x)$ die Function $U = G.\varphi(x)$ zu substituiren. Der Fehler oder die Differenz der Integrale der gegebenen und substituirten Function wird dann $\Delta =$

$$\int y\,dx - \int U dx = \int \varphi(x)\, V dx.$$

Es wird jetzt die Aufgabe gestellt, die Gröſsen a', a'', a''', ..., $a^{(n)}$, so zu bestimmen, dafs der Fehler Δ möglichst gering, oder die Näherung möglichst genau werde. In den Fällen, wo die Näherungsmethode mit Glück angewendet werden soll, müssen die Coëfficienten der für y gesetzten Reihe rasch abnehmen. Je mehr daher von den ersten Coëfficienten dieser Reihe, welche die hauptsächlichsten sind, in dem Ausdruck für den Fehler Δ verschwinden, desto kleiner wird er im Allgemeinen, und desto gröfser die Näherung. Da nun schon, was auch die Gröfsen, a', a'', a''', ..., $a^{(n)}$ waren, im Ausdrucke für $\Delta = \int \varphi(x) \, . \, V dx$, wie aus dem für V gefundenen Ausdrucke erhellt, die Coëfficienten a, a', a'', ..., $a^{(n-1)}$ nicht mehr vorkommen, so wollen wir, vermittelst schicklicher Bestimmung jener Gröfsen, auch noch die mit $a^{(n)}$, $a^{(n+1)}$, ..., $a^{(2n-1)}$, behafteten Glieder verschwinden machen, wodurch ein doppelter Grad der Näherung erreicht wird. Es wird dieses immer möglich seyn, da die Zahl der willkürlichen Gröfsen und der zu erfüllenden Bedingungen dieselbe ist. Man sieht sogleich aus dem für V gefundenen Ausdruck, dafs hierzu eine solche Bestimmung von $\varphi(x)$ erfordert wird, dafs die Integrale:

$$\int \varphi(x) dx, \quad \int x\varphi(x) dx, \quad \int x^2 \varphi(x) dx, \quad \ldots\ldots, \quad \int x^{n-1} \varphi(x) dx,$$

zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, zwischen denen das Integral $\int y dx$ genommen werden soll, verschwinden. Diese Bestimmung ist jetzt die Aufgabe.

4.

Es läfst sich durch eine bekannte Reductionsformel das Integral $\int x^m \varphi(x) dx$ auf die vielfachen Integrale von $\varphi(x)$ zurückführen. Man hat nemlich allgemein:

$$\begin{aligned}
\int uv dx &= u \int v dx - \int du \int v dx, \\
\int du \int v dx &= du \int^2 v dx - \int d^2 u \int^2 v dx, \\
\int d^2 u \int^2 v dx &= d^2 u \int^3 v dx - \int d^3 u \int^3 v dx, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\int d^m u \int^m v dx &= d^m u \int^{m+1} v dx - \int d^{m+1} u \int^{m+1} v dx,
\end{aligned}$$

wo man jede Formel aus der vorhergehenden erhält, indem man $\frac{du}{dx}$ statt u, und $\int v dx$ statt v setzt. Hieraus folgt sogleich:

$$\begin{aligned}
\int uv dx = u \int v dx - du \int^2 v dx + d^2 u \int^3 v dx - \ldots\ldots (-1)^m d^m u \int^{m+1} v dx \\
+ (-1)^{m+1} \int d^{m+1} u \int^{m+1} v dx.
\end{aligned}$$

Setzt man $u = x^m$, $v = \varphi(x)$, so erhält man hieraus:

$$\begin{aligned}
\int x^m \varphi(x) dx = x^m \int \varphi(x) dx - m x^{m-1} \int^2 \varphi(x) dx^2 + m(m-1) x^{m-2} \int^3 \varphi(x) dx^3 \\
- \ldots\ldots (-1)^m m(m-1)(m-2) \ldots\ldots 1 \int^{m+1} \varphi(x) dx^{m+1}.
\end{aligned}$$

Giebt man dem m nach einander die Werthe 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, so erhält man:

$\int \varphi(x) dx$

$$\int \varphi(x)\,dx \;= \int \varphi(x)\,dx,$$
$$\int x\varphi(x)\,dx = x\int \varphi(x)\,dx - \int^2 \varphi(x)\,dx^2,$$
$$\int x^2\varphi(x)\,dx = x^2\int \varphi(x)\,dx - 2x\int^2 \varphi(x)\,dx^2 + 2\int^3 \varphi(x)\,dx^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int x^{n-1}\varphi(x)\,dx = x^{n-1}\int \varphi(x)\,dx - (n-1)x^{n-2}\int^2 \varphi(x)\,dx^2 + (n-1)(n-2)x^{n-3}\int^3 \varphi(x)\,dx^3$$
$$-\ldots\ldots(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1\int^n \varphi(x)\,dx^n.$$

Diese Formeln sind bekannt. Man sieht aus ihnen, dafs wenn $\int \varphi(x)\,dx$ $\int x\varphi(x)\,dx$, $\int x^2\varphi(x)\,dx$, ..., $\int x^{n-1}\varphi(x)\,dx$, zwischen gewissen Grenzen verschwinden sollen, zwischen denselben Grenzen auch $\int \varphi(x)\,dx$, $\int^2 \varphi(x)\,dx^2$, $\int^3 \varphi(x)\,dx^3$, ..., $\int^n \varphi(x)\,dx^n$ verschwinden müssen, und umgekehrt.

5.

Unsere Aufgabe ist also jetzt darauf zurückgeführt, die Function $\varphi(x)$ so zu bestimmen, dafs ihr 1tes, 2tes, 3tes, ..., n^{tes} Integral, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, verschwinden; d. h., wenn man die aufeinanderfolgenden Integrale bis zum n^{ten} so bestimmt, dafs sie für $x = 0$ verschwinden, so sollen sie auch für $x = 1$ verschwinden.

Man setze $\int^n \varphi(x)\,dx^n = \Pi(x)$, die aufeinander folgenden Integrale so bestimmt, dafs jedes für $x = 0$ verschwindet, so kann man jetzt die Aufgabe so ausdrücken, eine Function $\Pi(x)$ zu finden, die für $x = 0$ und für $x = 1$, zugleich mit ihrem 1ten, 2ten, 3ten, ..., $(n-1)^{\text{ten}}$ Differentiale verschwindet. Dieses erheischt, dafs die Function $\Pi(x)$ die Factoren x^n und $(x-1)^n$ habe, und umgekehrt, jede Function, die den Factor $x^n(x-1)^n$ hat, erfüllt die verlangten Bedingungen. Es mufs daher gesetzt werden $\Pi(x) = x^n(x-1)^n M$. Da nun $\varphi(x) = (x-\alpha')(x-\alpha'')(x-\alpha''')\ldots\ldots(x-\alpha^{(n)})$, also eine ganze rationale Function von der n^{ten} Ordnung ist, so ist $\Pi(x) = \int^n \varphi(x)\,dx^n$ eine ganze rationale Function von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung, woraus folgt, dafs M für unsern Fall eine Constante ist. Auf diese Weise erhält man $\varphi(x) = \frac{M d^n x^n (x-1)^n}{dx^n} =$

$$x^n - \frac{n^2}{2n}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)}x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}x^{n-3}$$
$$+\ldots\ldots(-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots\ldots(n+1)},$$

wo $M = \frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}$ gesetzt worden ist.

Die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, für $\varphi(x)$ den eben gefundenen Ausdruck gesetzt, geben dann die Gröfsen α', α'', α''', ..., $\alpha^{(n)}$, so bestimmt, dafs der Grad der Näherung der möglichst gröfste sei. Da aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, dafs wenn die Wurzeln einer Gleichung $\Pi(x) = 0$ alle reel sind, auch alle Wurzeln einer Gleichung $\frac{d^m \Pi(x)}{dx^m} = 0$ reel sind, und zwischen den Wurzeln jener Gleichung liegen, so folgt hieraus, da die Wurzeln der Gleichung $\Pi(x) = 0$, oder der Gleichung $x^n(x-1)^n = 0$ alle reel sind, und zwar n von ihnen $= 0$, die anderen $= 1$, dafs auch die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, oder die Gröfsen α', α'', α''', ..., $\alpha^{(n)}$ alle reel sind, und zwischen 0 und 1 liegen; wie es auch Gaufs in den berechneten Beispielen gefunden hat. —

6.

In unserer, (§ 4) gefundenen Formel:

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - du\int^2 v\,dx + d^2u\int^3 v\,dx - \ldots\ldots (-1)^m d^m u\int^{m+1} v\,dx + (-1)^{m+1}\int d^{m+1}u\int^{m+1} v\,dx,$$

setze man $m = n-1$, $u = V$, $v = \varphi x$, so erhält man, da die n ersten Integrale von $v = \varphi x$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden, und

$$\int^n \varphi(x)\,dx^n = \frac{x^n(x-1)^n}{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)},$$

$$\Delta = \int \varphi(x) V\,dx = \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots.(n+1)} \int x^n(x-1)^n \frac{d^n V}{dx^{n-1}},$$

welches Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ zu nehmen ist.

Man setze ferner in der angeführten Formel $u = t^{m+1}$, und es verschwinde t für $x = l$, so wird auch u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, ..., $\frac{d^m u}{dx^m}$, für $x = l$, verschwinden. Es seyen ferner die Integrale $\int v\,dx$, $\int^2 v\,dx^2$, $\int^3 v\,dx^3$, ..., $\int^{m+1} v\,dx^{m+1}$ so genommen, dafs sie insgesammt für $x = 0$ verschwinden; so verschwinden $u\int v\,dx$, $du\int^2 v\,dx$, $d^2u\int^3 v\,dx$, ..., $d^m u\int^{m+1} v\,dx$, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$. Man erhält demnach, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$,

$$\int uv\,dx = \int t^{m+1} v\,dx = (-1)^{m+1}\int d^{m+1} t^{m+1} \int^{m+1} v\,dx.$$

Setzt man jetzt $t = 1 - x$, $l = 1$, $m = n-1$, $v = x^n \frac{d^n V}{dx^n}$, so erhält man, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$:

$$\int (1-x)^n x^n \frac{d^n V}{dx^{n-1}} = 1.2.3\ldots.n \int\int^n x^n \frac{d^n V}{dx^n} dx^{n+1} = 1.2.3\ldots.n \int^{n+1} x^n d^n V dx.$$

Man erhält auf diese Weise:

$$\Delta = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,n}{2n(2n-1)\,\ldots\ldots\,(n+1)} \int^{n+1} x^n\, d^n V\, dx,$$

wo die auf einander folgenden Integrale so zu nehmen sind, dafs sie für $x = 0$ verschwinden, und, nach beendigter Integration, $x = 1$ zu setzen ist. Unter dieser Form ist der Fehler Δ am leichtesten zu berechnen.

7.

Vermöge des (§ 2) findet man $\dfrac{d^n V}{dx^n} =$

$$\begin{aligned}
& a^{(2n)}\, n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1 A' \\
& + a^{(2n+1)}\big((n+1)\,n\,(n-1)\ldots\ldots 2A'x + n(n-1)(n-2)\ldots. 1A''\big) \\
& + a^{(2n+2)}\big((n+2)(n+1)\,n\ldots\ldots 3A'x^2 + (n+1)\,n\,(n-1)\ldots. 2A''x + n(n-1)(n-2)\ldots. 1A'''\big) \\
& + a^{(2n+3)}\big((n+3)(n+2)(n+1)\ldots. 4A'x^3 + (n+2)(n+1)n\ldots. 3A''x^2 + (n+1)n(n-1)\ldots. 2A'''x \\
& \qquad + n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1A^{\text{IV}}\big)
\end{aligned}$$

u. s. w.

Hieraus ergiebt sich $\Delta =$

$$\frac{1^2\,.\,2^2\,.\,3^2\ldots.\,n^2}{(n+1)^2(n+2)^2\ldots.(2n)^2(2n+1)}\left\{\begin{aligned}
& a^{(2n)}A' + a^{(2n+1)}\left(\frac{(n+1)^2}{2n+2}A' + A''\right) + \\
& a^{(2n+2)}\left(\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{1.2.(2n+2)(2n+3)}A' + \frac{(n+1)^2}{2n+2}A'' + A'''\right) + \\
& a^{(2n+3)}\left(\frac{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}{1.2.3.(2n+2)(2n+3)(2n+4)}A' + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{1.2.(2n+2)(2n+3)}A''\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{(n+1)^2}{2n+2}A''' + A^{\text{IV}}\right) \\
& \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\}$$

Diese ersten Glieder des Fehlers Δ können zur Correctur dienen. Die Gröfsen A', A'', A''', A^{IV} u. s. w. bilden eine wiederkehrende Reihe, da sie aus der Entwickelung des Bruchs $\dfrac{1}{\varphi(x)} =$

$$\frac{1}{x^n - \frac{n^2}{2n}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)}x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}x^{n-3} + \ldots. (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\ldots. 1}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots.(n+1)}}$$

entstanden sind, welche wir (§ 2)

$$\frac{A'}{x^n} + \frac{A''}{x^{n+1}} + \frac{A'''}{x^{n+2}} + \frac{A^{\text{IV}}}{x^{n+3}} + \text{u. s. w.}$$

gesetzt hatten. Sie werden durch die Gleichungen gefunden:

$$1 = A',$$
$$0 = A'\frac{n^2}{2n} - A'',$$
$$0 = A'\frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)} - A''\frac{n^2}{2n} + A''',$$
$$0 = A'\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} - A''\frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)} + A'''\frac{n^2}{2n} - A^{\text{IV}}$$

u. s. w.

Diese Resultate stimmen genau mit den von Gaufs gefundenen überein. —

28.

Die unbestimmt scheinenden Werthe einiger Functionen zu finden.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

Wenn p und q beliebige Functionen von x sind, und es ist:

$$z = \frac{p}{q},$$

so ist der Werth von z, welcher, wenn p und q für irgend einen Werth von x beide zugleich verschwinden, unbestimmt zu seyn scheint, bekanntlich gleich $\frac{dp}{dq}$, sofern die Differentiale nicht unendlich, und nicht etwa ebenfalls Null sind.

Man kann den Fall, wenn p und q für irgend einen Werth von x beide zugleich **unendlich** sind, in welchem Falle der Werth von z ebenfalls unbestimmt zu seyn scheint, auf den vorigen bringen. Es ist nemlich $\frac{p}{q} = \frac{1}{q} : \frac{1}{p}$, und in diesem Bruche sind $\frac{1}{q}$ und $\frac{1}{p}$ beide zugleich Null, wenn p und q beide zugleich unendlich sind. Der Werth von z ist also $= d\left(\frac{1}{q}\right) : d\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{dq}{q^2} : \left(-\frac{dp}{p^2}\right) = \frac{p^2 dq}{q^2 dp}$, das heifst: es ist $\frac{p}{q} = \frac{p^2 dq}{q^2 dp}$, wenn p und q beide zugleich,